

Projekt LissDreh

Daniel Grün

1 Motivation

In alten Unterlagen fand ich Schwingungsbilder, die von Dietrich Grün mittels mechanischen Methoden erzeugt worden waren.

Der Aufbau bestand aus einer Y-Aufhängung (zwei Fden, die sich an einer Stelle zu einem vereinen), an der eine punktförmige Lichtquelle in zwei Raumrichtungen mit durch $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ definierten, unterschiedlichen Frequenzen schwingt und einer auf einem Schallplattenteller montierten Kamera mit Langzeitbelichtung in einem dunklen Raum.

So ist es möglich, Lissajous-Figuren zu erzeugen, denen eine Rotation des Koordinatensystems überlagert ist.

Das Projekt LissDreh simuliert die entstehenden Schwingungsfiguren in C++ / SDL.

2 Mathematische Beschreibung

Im Folgenden werden Grundlagen der Rechnung mit komplexen Zahlen vorausgesetzt, da so die Darstellung der bewussten Figuren besonders einfach möglich ist.

Eine zweidimensionale Lissajous-Figur in der komplexen Zahlenebene mit Winkelgeschwindigkeit ω_i in imaginärer, ω_r in reeller Richtung, gleichen Amplituden von 1 und Phasengleichheit bei $t = 0$ lässt sich beschreiben durch:

$$L(t) = \sin(\omega_r \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_i \cdot t)$$

Die Lissajous-Figur ist somit die Wertemenge einer solchen komplexen Funktion für $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht einer Multiplikation ihrer Beträge mit Addition ihrer Winkel bezüglich der positiven reellen Achse (Drehstreckung). Multipliziert man eine komplexe Zahl z_1 (Winkel α_1) mit einer komplexen Zahl z_2 mit Betrag 1 und Winkel α_2 , so gilt:

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Dies entspricht schlicht einer Drehung von z_1 in der komplexen Zahlenebene um α_2 . Bei einer Drehbewegung über t mit Winkelgeschwindigkeit ω_{rot} ist die Zahl, mit der multipliziert werden muss, $z_2 = e^{i \cdot \omega_{rot} \cdot t}$.

Fasst man dies zusammen, erhält man für die komplexe Funktion einer Lissajous-Figur mit überlagelter Drehbewegung:

$$L(t) = e^{i \cdot \omega_{rot} \cdot t} \cdot (\sin(\omega_r \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_i \cdot t))$$

3 Umsetzung

Die obige Idee ist im Projekt LissDreh umgesetzt. Die Programme arbeiten mit der selbstgeschriebenen C++-Bibliothek Pasport, die leichte Ansteuerung der SDL-Grafikroutinen ermöglicht.

Implementiert ist die Lissajous-Gleichung wie folgt:

```
for(t=0; t<maxt; t++)
{
    // (1)
    sinx  = sin(omx*t);
    siny  = sin(omy*t);
    rotang = omr*t;

    // (2)
    // rotate complex number z=sinx + i*siny by multiplying
    // with e^i*rotang => z'=x+i*y
    // be careful with atan (doesn't go into 3rd and 4th quadrant)
    x=sqrt(sinx*sinx+siny*siny)*
        cos((((sinx>0)?0.0:PI)+atan(siny/sinx))+rotang);
    y=sqrt(sinx*sinx+siny*siny)*
        sin((((sinx>0)?0.0:PI)+atan(siny/sinx))+rotang);

    // (3)
    // x and y are element of [-sqrt(2);sqrt(2)]
    PUTPIXEL((x+sqrt(2))/(2.0*sqrt(2))*xdim,
              (y+sqrt(2))/(2.0*sqrt(2))*ydim,LIGHTGREEN,0);
}
```

Erluterungen:

1. `sinx` und `siny` sind die reellen und imaginären Komponenten, `rotang` der Drehwinkel
2. Umsetzung der Lissajous-Gleichung mit Rotation mit Hilfe der Euler-Formel ($e^{i\cdot\varphi} = \cos\phi + i\cdot\sin\phi$); dabei muss berücksichtigt werden, dass der Wertebereich des arcus tangens nur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ist, eine Fallunterscheidung also zur ganzen Umdrehung notwendig wird
3. Ausgabe des Pixels mit entsprechender Normierung der Koordinaten

LissDreh und Pasport sind als GPLter Sourcecode von `ccteam-bw.de` erhältlich. Besonders interessante Figuren ergeben sich, wenn man eine der Frequenzen leicht gegenüber einfachen ganzzahligen Verhältnissen verstimmt. Beispiele hierzu finden sich ebenfalls auf `ccteam-bw.de`.